Funções teste e funções generalizadas em dimensão 1. Descrição e caracterização

Jorge Ferreira, Délia Gouveia, Maurício Reis e José Luis Silva*
Universidade da Madeira, 9000-390 Funchal, Madeira

Resumo

Neste trabalho introduzimos uma família de espaços de funções teste definidas em $\mathbb{R}$ associadas à medida Gaussiana μ. Por dualidade obtemos a correspondente família de espaços de distribuições (ou funções generalizadas). A caracterização destas famílias à custa de funções inteiras com um certo tipo de crescimento é feita usando a transformada S. Como exemplo de aplicação apresentamos o produto de Wick entre funções generalizadas.

Palavras chave: medida Gaussiana, funções teste, funções generalizadas, transformada S, produto de Wick.

Abstract

In this work we introduce a family of test function spaces on $\mathbb{R}$ associated to the Gaussian measure μ. By duality we obtain the corresponding family of generalized function spaces. The characterization of these families through the entire fucntions with a certain growth is obtained using the S transform. Finally as an example of application we give the Wick product between generalized functions.

Keywords: Gaussian measure, test functions, generalized functions, S transform, Wick product.

---

*Este trabalho teve origem na cadeira de seminário do curso de matemática da Universidade da Madeira no ano 2000-2001. Contacto: mauricio@dme.uma.pt

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos uma abordagem do ponto de vista elementar a alguns espaços de funções teste e funções generalizadas. O ponto de vista aqui apresentado, não sendo o clássico, encontra-se já suficientemente difundido com mais generalidade, ver por exemplo [6] e [7]. Assim, introduzimos uma família de espaços nucleares de funções teste em $\mathbb{R}$ assim como o seu dual relativamente ao espaço de Hilbert $L^2(\mu)$. Estes espaços admitem uma caracterização em termos de funções analíticas por intermédio da transformada S, sendo esta uma espécie de transformada de Laplace normalizada. Num caso particular da referida família de espaços de funções generalizadas introduzimos uma espécie de produto o qual tem tido aplicações em diferentes áreas da Matemática, chamado produto de Wick.

O nosso ponto de partida é a densidade Gausseana no conjunto de reais $\mathbb{R}$,

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

e a medida μ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, a qual é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ com densidade ρ. Isto é,

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Dado que $\mu(\mathbb{R}) = 1$, então temos um espaço de probabilidade $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. A este espaço associamos o espaço de Hilbert $L^2(\mu)$ definido por

$$L^2(\mu) := \left\{ F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \middle| \ |F|^2_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{R}} |F(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Este espaço admite um conjunto ortonormado total formado pelos polinómios de Hermite, $\{H_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. A função geradora dos polinómios de Hermite é

$$e(z, x) = \exp\left(zx - \frac{z^2}{2}\right), z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Sendo $e(\cdot; x)$ uma função inteira, então pode ser desenvolvida em torno da origem:

$$e(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x). \tag{2}$$

Não é díficil verificar que $H_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}_0$ são polinómios de grau n, chamados polinómios de Hermite. O facto de $\{H_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ser total em $L^2(\mu)$ é uma consequência do teorema de aproximação de Weierstrass.

Usando os polinómios de Hermite, construimos os espaços de funções teste $\mathcal{N}^\beta$, $\beta \in [0,1]$. Estes espaços têm muitas propriedades, nomeadamente o facto de serem nucleares, que os tornam candidatos naturais quando se passa da análise em dimensão finita para a análise em dimensão infinita. Isto é o conteúdo da Secção 2.

Na Secção 3 vamos obter o espaço dual de $\mathcal{N}^\beta$ relativamente a $L^2(\mu)$. Mais precisamente, se $\Phi \in \left(\mathcal{N}^\beta\right)'$, então

$$\langle \varphi, \Phi \rangle = (\varphi, \Phi)_{L^2(\mu)}, \forall \varphi \in \mathcal{N}^\beta,$$

ou seja, o par dual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre uma função teste $\varphi \in \mathcal{N}^\beta$ e uma função generalizada $\Phi \in \left(\mathcal{N}^\beta\right)'$ é dado em termos do produto interno em $L^2(\mu)$. Para mais pormenores neste assunto ver, por exemplo [2].

Finalmente na Secção 4 vamos caracterizar os espaços construidos em termos de funções inteiras, as quais obedecem a certas condições de crescimento do tipo exponencial. Uma das aplicações desta caracterização é a definição do produto de Wick entre duas funções generalizadas. Os resultados desta secção estão baseados numa transformada definida nestes espaços. Nesta nota preferimos usar a transformada S, mas também é possível usar outras transformadas.

2 O espaço das funções teste

Nesta secção vamos introduzir uma família de espaços de funções teste cada um dos quais contido no espaço $L^2(\mu)$ densamente.

Para este fim, vamos denotar por $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinómios sobre $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{C}$, isto é,

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} |\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} \varphi_n x^n, \varphi_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Como cada potência x^n pode ser escrita à custa dos polinómios H_k, então o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é igualmente dado por

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} |\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} \varphi_n H_k(x), \varphi_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Esta última representação dos elementos em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ será usada no que se segue.

Seja $\beta \in [0,1]$ fixo e $q \in \mathbb{N}_0$ um número natural dado. Definimos uma norma Hilberteana em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $|\cdot|_{q,\beta}$, associada a β,q por intermédio de

$$|\varphi|^2_{q,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi_n|^2,$$

onde $\varphi = \sum_{n=0}^{N} \varphi_n H_n$. Note que, de facto, a norma anterior está associada a um produto interno. Denotemos por $\mathcal{H}^\beta_q$ o completado de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ na norma $|\cdot|_{q,\beta}$. Assim, por construção $\mathcal{H}^\beta_q$ é um espaço de Hilbert denso em $L^2(\mu)$. Podemos representar $\mathcal{H}^\beta_q$ por:

$$\mathcal{H}^\beta_q := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \ \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n H_n, \varphi_n \in \mathbb{C}, \ |\varphi|^2_{q,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi_n|^2 < \infty \right\}.$$

Finalmente o espaço das funções teste associado a β é definido por

$$\mathcal{N}^\beta := \bigcap_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}^\beta_q,$$

o qual pode ser representado por:

$$\mathcal{N}^\beta = \left\{ \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n H_n, \varphi^n \in \mathbb{C} | \ \forall q \in \mathbb{N}_0 \ |\varphi|^2_{q,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi^n|^2 < \infty \right\}.$$

Em $\mathcal{N}^\beta, \beta \in [0,1]$ introduzimos a seguinte noção de convergência. Uma sucessão $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{N}^\beta$ diz-se convergente para $\varphi \in \mathcal{N}^\beta$ sse a sucessão convergir em cada $\mathcal{H}^\beta_q$, $q \in \mathbb{N}_0$. É possível definir uma métrica sobre $\mathcal{N}^\beta$ de tal forma que $\mathcal{N}^\beta$ torna-se num espaço métrico completo e a topologia gerada por essa métrica coincide com a anterior. Mais precisamente,

$$\rho(\varphi, \psi) := \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{|\varphi - \psi|_{q,\beta}}{1 + |\varphi - \psi|_{q,\beta}}, \varphi, \psi \in \mathcal{N}^\beta.$$

Ver, por exemplo, [3] para a prova deste facto.

Note-se, no entanto, que $\mathcal{N}^\beta$ não é um espaço normado, pois não existe uma norma associada à métrica ρ. Por exemplo, essa norma a existir teria de verificar $\rho(\alpha\varphi, \alpha\psi) = |\alpha| \rho(\varphi, \psi)$, o que não acontece na realidade.

Como referimos na introdução, o espaço das funções teste $\mathcal{N}^{\beta}$ é nuclear, ou seja, para todo $q \in \mathbb{N}_0$ existe $p > q$ tal que o operador de injecção $i_{p,q} : \mathcal{H}_p^{\beta} \rightarrow \mathcal{H}_q^{\beta}$ é do tipo Hilbert-Schmidt. De facto, é fácil verificar que $\{H_n^q := ((n!)^{1+\beta} 2^{nq})^{-\frac{1}{2}} H_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ é um conjunto ortonormado total em $\mathcal{H}_q^{\beta}$. Portanto, a norma de Hilbert-Schmidt de $i_{p,q}$ é dada por

$$\begin{aligned}
|i_{p,q}|_{HS}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |i_{p,q}(H_n^q)|_q^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} \left((n!)^{1+\beta} 2^{np}\right)^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-q}}\right)^n .
\end{aligned}$$

Basta escolher $p > q$ para que a última série seja convergente e, assim, $\mathcal{N}^{\beta}$ é um espaço nuclear.

Exemplo 1 *Para cada* $z \in \mathbb{C}$, *consideremos a função* $e(z,\cdot)$ *definida em (1). Então* $e(z,\cdot) \in \mathcal{N}^{\beta}, \forall \beta \in [0,1)$ *e para* $\beta = 1$ $e(z,\cdot) \in \mathcal{N}^1$ *sse* $|z| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Prova. De facto, atendendo ao desenvolvimento (2) podemos calcular a norma de $e(z,\cdot)$ como

$$\begin{aligned}
|e(z,\cdot)|_{q,\beta}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} \frac{|z|^{2n}}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(2^q |z|^2\right)^n}{(n!)^{1-\beta}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\beta}} \frac{\left(2^{\beta} 2^q |z|^2\right)^n}{(n!)^{1-\beta}} .
\end{aligned}$$

Usando a igualdade de Hölder para o par $\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{1-\beta}\right)$ obtemos

$$|e(z,\cdot)|_{q,\beta}^2 \leq 2^{\beta} \exp\left(2^{\frac{\beta}{1-\beta}} 2^{\frac{q}{1-\beta}} |z|^{\frac{2}{1-\beta}} (1-\beta)\right) < \infty, \forall z \in \mathbb{C}, \beta \in [0,1) .$$

Para $\beta = 1$, temos

$$|e(z,\cdot)|_{q,1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2^q |z|^2)^n .$$

Esta última série é convergente sse $|z| < 2^{-\frac{q}{2}}, q \in \mathbb{N}_0$. Isto completa a prova o Exemplo 1. ■

Definição 2 *Seja $F \in L^2(\mu)$ uma função dada. A transformada S de F é definida por*

$$SF : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto (SF)(z) := \int_{\mathbb{R}} e(z,x)F(x)d\mu(x). \tag{3}$$

É claro que SF está bem definida, pois pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|(SF)(z)| \leq |e(z,\cdot)|_{L^2(\mu)} |F|_{L^2(\mu)} = e^{|z|^2/2} |F|_{L^2(\mu)} < \infty.$$

Exemplo 3 *Seja $\varphi \in \mathcal{N}^\beta$ uma função teste dada. Então a transformada S de φ é dada por*

$$(S\varphi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n,$$

onde $\varphi_n = (\varphi, H_n)_{L^2(\mu)}$. Temos ainda a seguinte majoração para $S\varphi$:

$$|(S\varphi)(z)| \leq |\varphi|_{q,\beta} \exp(k^{-1} 2^{-\frac{qk}{2}} |z|^k), \ k = \frac{2}{1+\beta} \tag{4}$$

Prova. Por definição os elementos em $\mathcal{N}^\beta$ são dados por intermédio de uma série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n H_n(x),$$

onde $\varphi_n = (\varphi, H_n)_{L^2(\mu)} \in \mathbb{C}$ tal que $\forall q \in \mathbb{N}_0$ temos

$$|\varphi|_{q,\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi_n|^2 < \infty.$$

Assim, atendendo à definição de S (cf.(3)) obtemos

$$\begin{aligned} (S\varphi)(z) &= (e(z,\cdot), \bar{\varphi})_{L^2(\mu)} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \varphi_m (H_n, H_m)_{L^2(\mu)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n. \end{aligned}$$

Assim, a primeira parte do exemplo está provada. Por outro lado, para majorar $|(S\varphi)(z)|$, vamos usar num primeiro passo a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned}
|(S\varphi)(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty}((n!)^{1+\beta}2^{nq})^{\frac{1}{2}}\,|\varphi_n|\,((n!)^{1+\beta}2^{nq})^{-\frac{1}{2}}\,|z|^n \\
&\leq |\varphi_n|_{q,\beta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^{-q}\,|z|^2)^n}{(n!)^{1+\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\varphi_n|_{q,\beta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(2^{-\frac{q}{1+\beta}}\,|z|^{\frac{2}{1+\beta}}\right)^n}{(n!)}\right)^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

A última série pode ser estimada usando o Lema 4 em baixo por

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(2^{-\frac{q}{1+\beta}}\,|z|^{\frac{2}{1+\beta}}\right)^n}{(n!)}\right)^{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \exp\left(\frac{1+\beta}{2}2^{-\frac{q}{1+\beta}}\,|z|^{\frac{2}{1+\beta}}\right).$$

Portanto obtemos a majoração (4) pretendida. ■

A prova do exemplo anterior fica concluida com o seguinte lema.

Lema 4 *Para qualquer número real* $r \geq 1$ *temos a seguinte desigualdade*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^r \leq e^{rx}, x \geq 0.$$

Prova. Para $r = 1$ temos a igualdade e quando r é natural a desigualdade é óbvia. Assim, precisamos provar o lema unicamente para $1 < r < 2$. Podemos escrever

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^r = \left(\frac{x^n}{n!}\right)^{2-r}\left(\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2\right)^{r-1},$$

e aplicar a desigualdade de Hölder com $p = \frac{1}{2-r}, q = \frac{1}{r-1}$ obtendo-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^r &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)^{2-r}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2\right)^{r-1} \\
&\leq (e^x)^{2-r}\left(e^{2x}\right)^{r-1} = e^{rx}.
\end{aligned}$$

■

3 O espaço das funções generalizadas

Nesta secção vamos considerar funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{N}^\beta$ e obter uma descrição destes elementos. Em primeiro lugar, vamos fazer algumas considerações preliminares. Por construção temos a seguinte inclusão densa $\mathcal{H}_q^\beta \subset L^2(\mu)$. Então, vamos procurar o dual de $\mathcal{H}_q^\beta$ no sentido de $L^2(\mu)$, isto é, os funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{H}_q^\beta$ são dados em termos do produto interno em $L^2(\mu)$. Simbolicamente, se $\Phi \in \left(\mathcal{H}_q^\beta\right)'$então

$$\langle \varphi, \Phi \rangle = (\varphi, \Phi)_{L^2(\mu)}, \forall \varphi \in \mathcal{H}_q^\beta,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o valor da distribuição Φ aplicado à função teste φ, também designado por par dual entre a função teste e a distribuição.

Este procedimento é conhecido na literatura como espaços de Hilbert encaixados (em Inglês "rigged Hilbert spaces") e que nós chamaremos simplesmente tripleto de espaços de Hilbert. Não vamos aqui descrever este processo. Os leitores interessados podem consultar os livros [1] ou [2]. O resultado final é o seguinte tripleto

$$\mathcal{H}_{-q}^{-\beta} \supset L^2(\mu) \supset \mathcal{H}_q^\beta.$$

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{-q}^{-\beta}$ admite a seguinte representação

$$\mathcal{H}_{-q}^{-\beta} := \left\{ \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n H_n,\ \Phi_n \in \mathbb{C} |\ |\Phi|_{-q,-\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} |\Phi_n|^2 < \infty \right\}. \tag{5}$$

Assim, $\varphi \in \mathcal{H}_q^\beta$ é uma função teste e $\Phi \in \mathcal{H}_{-q}^{-\beta}$ é uma função generalizada se as seguintes séries convergem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |\varphi_n|^2,\ \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} |\Phi_n|^2,$$

onde $\varphi_n = (\varphi, H_n)_{L^2(\mu)}$ e $\Phi_n = (H_n, \Phi)_{L^2(\mu)}$. Dado que $(n!)^{1+\beta} 2^{nq} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$, então a sucessão $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ é decrescente ao passo que a sucessão $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ pode ser crescente.

Como é do conhecimento geral, um funcional linear contínuo Φ definido sobre $\mathcal{N}^\beta$ é uma aplicação linear tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança da origem $\mathcal{U} \subset \mathcal{N}^\beta$ tal que

$$|\langle \varphi, \Phi \rangle| < \varepsilon, \forall \varphi \in \mathcal{U}.$$

Esta condição traduz a continuidade do funcional Φ. Dado que $\{\varphi \in \mathcal{N}^\beta, |\varphi|_p < \varepsilon, \, p \in \mathbb{N}_0\}$ constitui uma base da vizinhança da origem em $\mathcal{N}^\beta$, então o facto de Φ ser limitado numa vizinhança da origem é equivalente a ser limitado na norma $|\cdot|_p$, isto é,

$$|\langle \varphi, \Phi \rangle| \leq c \, |\varphi|_p \, .$$

Inversamente, se Φ é um funcional linear sobre $\mathcal{N}^\beta$ e limitado em relação a certa norma, então é contínuo.

O espaço dual de $\mathcal{N}^\beta$ relativamente a $L^2(\mu)$ é dado por

$$\left(\mathcal{N}^\beta\right)' = \mathcal{N}^{-\beta} = \bigcup_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{-q}^{-\beta}, \tag{6}$$

ou seja, atendendo a (5), $\mathcal{N}^{-\beta}$ é da forma

$$\mathcal{N}^{-\beta} = \left\{ \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n H_n, \Phi^n \in \mathbb{C} | \; \exists q \in \mathbb{N}_0 \;\; |\Phi|_{-q,-\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} \, |\Phi^n|^2 < \infty \right\}.$$

Vejamos que, na realidade, o par dual entre uma função teste e uma função generalizada é dado em termos do produto interno em $L^2(\mu)$. Sejam $\varphi \in \mathcal{N}^\beta$, $\Phi \in \mathcal{N}^{-\beta}$ dados, então existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\Phi \in \mathcal{H}_{-p}^{-\beta}$, pelo que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \Phi \rangle &= (\varphi, \bar{\Phi})_{L^2(\mu)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varphi_n \Phi_m \left(H_n, H_m \right)_{L^2(\mu)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \varphi_n \Phi_n \leq |\varphi|_{p,\beta} \, |\Phi|_{-p,-\beta} \, . \end{aligned}$$

Um exemplo clássico de um elemento em $\mathcal{N}^{-\beta}$ é a função generalizada denominada delta de Dirac.

Exemplo 5 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um número real dado. Consideremos o seguinte funcional em $\mathcal{N}^\beta$ definido por*

$$\delta_{x_0} : \mathcal{N}^\beta \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \langle \varphi, \delta_{x_0} \rangle := \varphi(x_0).$$

Então δ_{x_0} é um elemento em $\mathcal{N}^{-\beta}$.

Prova. Atendendo a (6), basta provar que existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que $\delta_{x_0} \in \mathcal{H}_{-q}^{-\beta}$. Com vista a calcular a norma $|\cdot|_{-q,-\beta}$ de δ_{x_0} vamos obter o seu desenvolvimento em termos dos polinómios de Hermite. É fácil verificar que δ_{x_0} é dado por

$$\delta_{x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x_0)}{n!} H_n.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} |\delta_{x_0}|_{-q,-\beta}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} \left| \frac{H_n(x_0)}{n!} \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(2^{-q} c^2 \left(1+|x_0|\right)^2\right)^n}{(n!)^{\beta}}, \end{aligned}$$

onde usamos a seguinte majoração para os polinómios de Hermite:

$$|H_n(x)| \leq c^n (n!)^{\frac{1}{2}} \left(1+|x|\right)^n, \; c > 0.$$

Se $\beta = 0$, então basta escolher q tal que $2^{-q} c^2 \left(1+|x_0|\right)^2 < 1$ e temos

$$|\delta_{x_0}|_{-q,-\beta}^2 = \frac{1}{1-r}, \; r = 2^{-q} c^2 \left(1+|x_0|\right)^2.$$

Para $\beta \in]0,1]$ podemos fazer a seguinte majoração

$$\begin{aligned} |\delta_{x_0}|_{-q,-\beta}^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(2^{-q} c^2 \left(1+|x_0|\right)^2\right)^n}{n!} \\ &= \exp\left(2^{-q} c^2 \left(1+|x_0|\right)^2\right). \end{aligned}$$

Em qualquer dos casos temos $\delta_{x_0} \in \mathcal{N}^{-\beta}$. ■

Vamos agora ver como prolongar a transformada S ao espaço $\mathcal{N}^{-\beta}$. A Definição 2 não pode ser aplicada directamente quando $F \in L^2(\mu)$ é substituida por $\Phi \in \mathcal{N}^{-\beta}$, pois, em geral $\Phi \notin L^2(\mu)$, o que tornaria a definição mencionada (cf.(3)) ambígua. No entanto, no Exemplo 1 vimos que $e(z,\cdot)$, $z \in \mathbb{C}$ é uma função teste pertencente a $\mathcal{N}^{\beta}, \forall \beta \in [0,1)$ e para $|z| < \varepsilon, \varepsilon > 0$ também temos $e(z,\cdot) \in \mathcal{N}^1$. Assim, a seguinte definição é natural.

Definição 6 *Seja $\Phi \in \mathcal{N}^{-\beta}$ uma função generalizada dada.*

1. *Se $\beta \in [0,1)$, a transformada S de Φ é definida por*

$$S\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (S\Phi)(z) := \left\langle e(z,\cdot), \bar{\Phi} \right\rangle. \tag{7}$$

2. *Se $\beta = 1$ e $\Phi \in \mathcal{H}_{-q}^{-1}$, denotando por $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \, |z| < 2^{-\frac{q}{2}} \right\}$, então a transformada S de Φ é*

$$S\Phi : A \to \mathbb{C}, z \mapsto (S\Phi)(z) := \left\langle e(z,\cdot), \bar{\Phi} \right\rangle.$$

Exemplo 7 *Seja $\Phi \in \mathcal{H}_{-q}^{-\beta}$ dado. Então a transformada S de Φ é dada por*

$$(S\Phi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n z^n, \tag{8}$$

onde $\Phi_n = \langle H_n, \Phi \rangle$. Além disso, se $\beta \in [0,1)$ temos

$$|(S\Phi)(z)| \leq |\Phi|_{-q,-\beta} \, 2^{\frac{\beta}{2}} \exp((k')^{-1} 2^{\frac{k'}{2}(\beta+q)} \, |z|^{k'}),\ z \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

sendo k' o expoente conjugado de k, isto é, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$, ou seja, $k' = \frac{2}{1-\beta}$.

No caso $\beta = 1$ temos

$$|(S\Phi)(z)| \leq |\Phi|_{-q,-1} \frac{1}{\sqrt{1-r}},\ r = 2^q \, |z|^2,\ |z| < 2^{\frac{q}{2}}. \tag{10}$$

Prova. De facto, a igualdade (8) é uma consequência directa da definição (7). As desigualdades (9) e (10) são uma consequência de

$$\left| \left\langle e(z,\cdot), \bar{\Phi} \right\rangle \right| \leq |e(z,\cdot)|_{q,\beta} \, |\Phi|_{-q,-\beta}$$

e do resultado do Exemplo 1. ■

4 Caracterização dos espaços $\mathcal{N}^{\beta}$ e $\mathcal{N}^{-\beta}$

Nesta secção vamos caracterizar os espaços de funções teste $\mathcal{N}^{\beta}$ assim como os espaços de funções generalizadas $\mathcal{N}^{-\beta}$ por intermédio da transformada S. Muitas vezes nós especificamos funções generalizadas pela sua transformada S, assim é importante caracterizar as funções as quais são transformadas S de funções generalizadas.

No Exemplo 3 vimos que se $\varphi \in \mathcal{N}^{\beta}$, então $S\varphi$ é uma função inteira tal que (cf.(4))

$$|(S\varphi)(z)| \leq |\varphi|_{q,\beta} \exp(k^{-1}2^{-\frac{qk}{2}} |z|^{k}), k = \frac{2}{1+\beta}, q \in \mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Denotamos por $\mathcal{E}^{k}_{\min}(\mathbb{C})$ o espaço das funções inteiras as quais verificam um crescimento do tipo (11). Simbolicamente,

$$\mathcal{E}^{k}_{\min}(\mathbb{C}) := u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \mathrm{inteira}, \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{c} > 0 : |\mathrm{u(z)}| \leq \mathrm{c}e^{\varepsilon|\mathrm{z}|^{\mathrm{k}}}.$$

O próximo teorema diz-nos que os espaços $\mathcal{N}^{\beta}$ e $\mathcal{E}^{k}_{\min}(\mathbb{C})$ estão em correspondência bijectiva por intermédio da transformada S.

Teorema 8 *A transformada S estabelece uma bijecção entre $\mathcal{N}^{\beta}$ e $\mathcal{E}^{k}_{\min}(\mathbb{C})$ para $\beta \in [0,1]$ e $k = \frac{2}{1+\beta}$.*

Prova. Pelas considerações anteriores e, tendo em conta, o Exemplo 3 temos que $S\varphi \in \mathcal{E}^{k}_{\min}(\mathbb{C})$. Assim, resta provar que S é sobrejectiva, isto é, se $u \in \mathcal{E}^{k}_{\min}(\mathbb{C})$, então exite $\varphi_u \in \mathcal{N}^{\beta}$ tal que $S\varphi_u = u$. Consideremos o seguinte desenvolvimento em torno da origem de u

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n.$$

Definimos φ_u por

$$\varphi_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n H_n(x), x \in \mathbb{R}.$$

Então, temos de provar que $\varphi_u \in \mathcal{N}^{\beta}$, isto é, para qualquer $q \in \mathbb{N}_0$ temos

$$|\varphi_\mu|^2_{q,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{nq} |u_n|^2 < \infty. \tag{12}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy aos coeficientes u_n temos

$$|u_n| \leq \frac{c \exp\left(a\rho^k\right)}{\rho^n}, \rho > 0. \tag{13}$$

É fácil verificar que o mínimo de $\frac{c\exp\left(a\rho^k\right)}{\rho^n}$ é atingido quando $\rho = c\left(\frac{n}{k\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}$. Assim, substituindo em (13) este valor de ρ obtemos

$$|u_n| \leq (\varepsilon k)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{1}{e^{-n}n^n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Usando a fórmula de Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, podemos garantir que existe $K > 0$ tal que $n^n e^{-n} \geq \frac{n!}{K(n+1)}$. Daqui resulta a seguinte majoração para $|u_n|$

$$|u_n| \leq c\,(\varepsilon k)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{K(n+1)}{n!}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Substituindo esta majoração de $|u_n|$ em (12) vem que

$$\begin{aligned}
|\varphi_\mu|^2_{q,\beta} &\leq \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{nq}c^2(\varepsilon k)^{\frac{2n}{k}}\left(\frac{K(n+1)}{n!}\right)^{\frac{2}{k}} \\
&\leq c^2K^{1+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^q\left(\frac{2\varepsilon}{1+\beta}\right)^{1+\beta}\right)^n(n+1)^2 \\
&\leq 2c^2K^{1+\beta}\left(1-2^q\left(\frac{2\varepsilon}{1+\beta}\right)^{1+\beta}\right)^{-3},
\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade possível desde que ε seja tal que $2^q\left(\frac{2\varepsilon}{1+\beta}\right)^{1+\beta} < 1$, tendo em conta que $2(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(n+1)(n+2)$. Isto conclui a prova do teorema. ■

Vamos de seguida tratar de caracterizar o espaço $\mathcal{N}^{-\beta}$. No Exemplo 7 vimos que se $\Phi \in \mathcal{H}_{-q}^{-\beta} \subset \mathcal{N}^{-\beta}$, então para $\beta \in [0,1)$ temos (cf.(9))

$$|(S\Phi)(z)| \leq |\Phi|_{-q,-\beta}\, 2^{\frac{\beta}{2}} \exp((k')^{-1}2^{\frac{k'}{2}(\beta+q)}\,|z|^{k'}),\ k' = \frac{2}{1-\beta}. \tag{14}$$

O caso $\beta = 1$ vamos analisar no Teorema 10 mais à frente. Ainda, do Exemplo 7, temos que $S\Phi$ é representável por intermédio de uma série

$$(S\Phi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n z^n,\ \Phi_n = \langle H_n, \Phi\rangle\,. \tag{15}$$

Assim denotamos por $\mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C})$ o conjunto das funções inteiras cujo crescimento é do tipo (14). Simbolicamente

$$\mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C}) := \{u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \mathrm{inteira}, \exists \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 > 0 : |\mathrm{u(z)}| \leq \mathrm{c}_1 \exp(\mathrm{c}_2\,|\mathrm{z}|^{\mathrm{k}'})\}.$$

Desta forma é óbvio que $S\Phi \in \mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C})$. O próximo teorema diz-nos também que toda a função em $\mathcal{E}^{k'}_{\max}(\mathbb{C})$ é imagem por intermédio de S de um elemento em $\mathcal{N}^{-\beta}$, $\beta \in [0,1)$.

Teorema 9 *A transformada* S *realiza uma bijecção entre* $\mathcal{N}^{-\beta}$ *e* $\mathcal{E}_{\max}^{k'}(\mathbb{C})$ *para* $\beta \in [0,1)$ *e* $k' = \frac{2}{1-\beta}$.

Prova. Resta provar que dado $u \in \mathcal{E}_{\max}^{k'}(\mathbb{C})$ existe $\Phi_u \in \mathcal{N}^{-\beta}$ tal que $S\Phi_u = u$. Assim, se $u \in \mathcal{E}_{\max}^{k'}(\mathbb{C})$ é da forma $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$, definimos Φ_u por $\Phi_u := \sum_{n=0}^{\infty} u_n H_n$. É óbvio que $S\Phi_u = u$. Logo, resta provar que $\Phi_u \in \mathcal{N}^{-\beta}$, isto é, existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|\Phi_u|_{-q,-\beta}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} |u_n|^2 < \infty.$$

Por um processo idêntico ao da prova do teorema anterior temos

$$|u_n| \leq c_1 (c_2 k')^{\frac{n}{k'}} \left(\frac{w(n+1)}{n!} \right)^{\frac{1}{k'}}, \ w > 0.$$

Usando esta desigualdade na igualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned} |\Phi_u|_{-q,-\beta}^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\beta} 2^{-nq} c_1^2 (c_2 k')^{\frac{2n}{k'}} \left(\frac{w(n+1)}{n!} \right)^{\frac{2}{k'}} \\ &\leq c_1^2 w^{\frac{2}{k'}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-q} (c_2 k')^{\frac{2}{k'}} \right)^n (n+1) \\ &= c_1^2 w^{\frac{2}{k'}} \left(1 - 2^{-q} (c_2 k')^{\frac{2}{k'}} \right)^{-2}, \end{aligned}$$

desde que q seja tal que $2^{-q} (c_2 k')^{\frac{2}{k'}} < 1$, e, tendo em conta, o facto $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (n+1)$, $|x| < 1$. Portanto $\Phi_u \in \mathcal{H}_{-q}^{-\beta} \subset \mathcal{N}^{-\beta}$ como pretendiamos. ■

Finalmente resta caracterizar as funções dadas por transformados S de elementos em $\mathcal{N}^{-1}$. Ainda, do Exemplo 7, temos que se $\Phi \in \mathcal{H}_{-q}^{-1} \subset \mathcal{N}^{-1}$, então $(S\Phi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n z^n$, sendo esta série absolutamente convergente em torno da origem. Temos que (cf (10))

$$|(S\Phi)(z)| \leq |\Phi|_{-q,-1} \frac{1}{\sqrt{1-r}}, \ r = 2^q |z|^2, \ |z| < 2^{\frac{q}{2}}.$$

Assim, a transformada S de um elemento em $\mathcal{N}^{-1}$ é uma função holomorfa em torno da origem. Denotamos por $Hol_0(\mathbb{C})$ o conjunto destas funções. O próximo teorema afirma que o recíproco é válido.

Teorema 10 *Os espaços $\mathcal{N}^{-1}$ e $Hol_0(\mathbb{C})$, estão em correspondência bijectiva, sendo esta estabelecida por intermédio da transformada S.*

Prova. Sendo $u \in Hol_0(\mathbb{C})$ uma função holomorfa em torno da origem, então definimos $\Phi_u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n H_n$, onde u_n são os coeficientes de Taylor de u em torno da origem. Temos

$$|u_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\rho} \frac{|u(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq \frac{c}{\rho^n},$$

onde $c > 0$ é tal que $|u(z)| \leq c$ e $\rho > 0$. Assim

$$|\Phi_u|^2_{-q,-1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq} \frac{c^2}{\rho^{2n}} = c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-q}\rho^{-2}\right)^n.$$

A última série é convergente desde que $2^q\rho^2 > 1$. Portanto, escolhendo q tal que $2^q\rho^2 > 1$ temos $\Phi_u \in \mathcal{H}^{-1}_{-q} \subset \mathcal{N}^{-1}$. ∎

Exemplo 11 *Sejam w, $w' \in \mathbb{C}$ tais que $w' \neq 1$. Consideremos a função u dada por*

$$u : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto u(z) := \exp\left(\frac{1}{1+w'}\bar{w}z - \frac{1}{2(1+w')}z^2\right).$$

É fácil verificar que $u \in \mathcal{E}^2_{\max}(\mathbb{C}),\beta = 0$. Pelo que existe um único elemento $\Phi_{w,w'} \in \mathcal{N}^{-0}$ tal que $S\Phi_{w,w'} = u$.

Exemplo 12 *(Funções generalizadas induzidas por medidas Gausseanas) Seja $\mu_{x,t}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ a medida Gausseana sobre $\mathbb{R}$ com média x e variância t, isto é, a sua função característica é dada por*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iry} d\mu_{x,t}(y) = \exp\left(ixr - \frac{1}{2}tr^2\right),\ r \in \mathbb{R}.$$

Definimos u por

$$u(z) := e^{-\frac{1}{2}z^2} \int_{\mathbb{R}} e^{zy} d\mu_{x,t}(y) = \exp\left(xz - \frac{1}{2}(1-t)z^2\right),\ z \in \mathbb{C}.$$

Obviamente $u \in \mathcal{E}^2_{\max}(\mathbb{C})$, $\beta = 0$ e, assim, pelo Teorema 9 existe $\Psi_{x,t} \in \mathcal{N}^{-0}$ tal que

$$(S\Psi_{x,t}) = \exp\left(xz - \frac{1}{2}(1-t)z^2\right).$$

Notemos que as funções generalizadas $\Phi_{w,w'}$ e $\Psi_{x,t}$ estão relacionadas por

$$\Phi_{w,w'} = \Psi_{\frac{1}{1+w'}w, \frac{w'}{1+w'}}; \quad \Psi_{x,t} = \Phi_{\frac{1}{1-t}x, \frac{t}{1-t}}.$$

5 Aplicações - produto de Wick

É óbvio que o espaço $Hol_0(\mathbb{C})$ das funções holomorfas em torno da origem formam uma álgebra para a soma e para a multiplicação por escalar usuais de funções. Este facto permite-nos introduzir uma espécie de multiplicação no espaço das funções generalizadas $\mathcal{N}^{-1}$. Mais precisamente, se $\Phi, \Psi \in \mathcal{N}^{-1}$ são duas funções generalizadas então pelo Teorema 10 temos $S\Phi \cdot S\Psi \in Hol_0(\mathbb{C})$. Assim, usando outra vez o Teorema 10 existe uma função generalizada $\Theta \in \mathcal{N}^{-1}$ tal que $S\Theta = S\Phi \cdot S\Psi$, ou seja, $\Theta = S^{-1}(S\Phi \cdot S\Psi)$. Vamos denotar a função generalizada $\Theta = \Phi\diamondsuit\Psi$, à qual chamamos produto de Wick entre Φ e Ψ. É fácil obter a série correspondente a $\Phi\diamondsuit\Psi$ em termos dos coeficientes Φ e Ψ. De facto, se Φ e Ψ são dados por

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n H_n, \ \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n H_n,$$

então, atendendo a (15), temos

$$(S\Phi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n z^n, \ (S\Psi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n z^n.$$

Usando o produto de Cauchy e a transformada inversa de S obtemos a seguinte representação para $\Phi\diamondsuit\Psi$

$$\Phi\diamondsuit\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \Phi_k \Psi_{n-k} \right) H_n.$$

Temos ainda o seguinte resultado relativo à norma de $\Phi\diamondsuit\Psi$ em função da norma de Φ e Ψ. Se $\Phi \in \mathcal{H}_{-p}^{-1}$ e $\Psi \in \mathcal{H}_{-q}^{-1}$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, então, se denotarmos por $r = p + q + 1$, temos

$$|\Phi\diamondsuit\Psi|_{-r,-1}^2 \leq |\Phi|_{-p,-1}^2 \, |\Psi|_{-q,-1}^2 \, .$$

Deste modo fica verificado que o produto de Wick, $\Phi\diamondsuit\Psi$ é na realidade um elemento em $\mathcal{N}^{-1}$. Podemos também introduzir o produto de Wick nos espaços de funções generalizadas $\mathcal{N}^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1)$ assim como nos espaços de funções teste $\mathcal{N}^{\beta}$, $\beta \in [0, 1]$. O produto de Wick é frequentemente usado em modelos de equações diferenciais parciais estocásticas sendo as soluções obtidas por intermédio da aplicação da transformada S. Para mais detalhes e generalizações ver, por exemplo, [5].

Referências

[1] Berezansky, Y. M. (1986), S*elfadjoint operators in spaces of functions of infinite many variables,* Vol. 63 of Trans. Amer. Math. Soc., American Mathematical Society.

[2] Berezansky, Y. M., Sheftel, Z. G. & Us, G. F. (1996), *Functional Analysis,* Vol. 2, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.

[3] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov. *Generalized Functions: Spaces of Fundamental and Generalized Functions*, volume 2. Academic Press, Inc., New York and London, 1968.

[4] Hida, T., Kuo, H. H., Potthoff, J. & Streit, L. (1993), *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[5] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, and T. Zhang. *Stochastic Partial Differential Equations: a modeling, white noise functional approach.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

[6] Kondratiev, Yu. G. and Streit, L., Spaces of white noise distributions: Constructions, Descriptions I, Applications, Reports on Mathematical, Phisics, Vol 33:341-366, 1993.

[7] Kondratiev, Yu.G., Leukert, P. and Streit, L., Wick calculus Gaussian analysis, Acta Applicandae Mathematicae 44: 269-294, 1996.

[8] Kuo, H.-H., White noise distribution theory, CRC, Inc. 1996.